

# GYAKORLÓ FELADATOK

## MATEMATIKA

### 10. osztály

#### I. STATISZTIKA

1. Tekintsük a következő mintát: 10,10,10, 15, 15, 15, 15, 20, 20, 20, 20, 20, 30, 30, 50, 50, 80. Számítsd ki a minta móduszát, átlagát és mediánját!
2. Hagyj el egy számot az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok közül úgy, hogy a megmaradt számok átlaga 5 legyen! Melyik számot kell elhagynod?
3. Egy bizonyos növényfajtából 100 termést vizsgáltak meg abból a szempontból, hogy hány magot (szemet) tartalmaznak. A következő táblázat mutatja az eredményt:

Terméskénti magszám	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Gyakoriság	2	1	3	9	19	26	21	12	7

Készíts oszlopdiaagramot a magok számáról! Add meg az átlagos magszámot! Mekkora a magszám mediánja, módusza?

#### II. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

4. Tükrözz egy háromszöget  
a) egyik oldalának egyenesére.                                      b) egyik oldal felezőpontjára.  
Az eredeti és a képháromszög egyesítése milyen síkidomot határoz meg?
5. Tükrözd az ABC háromszöget a derékszögű koordináta-rendszerben az  
a)  $y=x$  egyenesre.                                                                                      b) az origóra.  
A háromszög csúcspontjai A(6;0) B(-1;3) C(2;-4). Határozd meg a képháromszög csúcspontjainak koordinátáit!
6. Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis az állítás! Válaszodat indokold!  
a) Ha egy háromszögnek van szimmetriatengelye, akkor oldalai egyenlő hosszúak.  
b) Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor átlói felezik egymást.  
c) Ha egy négyszög tengelyesen szimmetrikus, akkor van olyan csúcsa, amelyik illeszkedik a szimmetriatengelyre.  
d) Van középpontosan szimmetrikus háromszög.

#### II. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

##### *Skatulya-elv*

7. Igaz-e, hogy 6 gyerek között mindig van kettő, akinek azonos a matematikajegye? Miért?
8. Egy ládában négyfajta alma van, minden fajtából egyenlő mennyiségű, összesen 100 db.  
a) Hány almát kell bekötött szemmel kivenni, hogy valamelyik fajtából legalább 10 alma biztosan legyen?  
b) Hány almát kell kivenni, hogy mindegyik fajtából legalább egy alma biztosan legyen!
9. Egy sötét szobában egy fiókban 12 piros és 12 kék zokni van.  
a) Legkevesebb hány zoknit kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen legalább két azonos színű zokni köztük?  
b) Legkevesebb hány zoknit kell kivennem, hogy biztosan legyen köztük két piros zokni?

## Kombinatorika

### *Ismétlés nélküli permutáció*

10. Öt diák (A, B, C, D, E) elmegy moziba, és egymás mellé kapnak jegyeket.
- Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé?
  - Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé, ha A és C mindenképp egymás mellé szeretne ülni?
  - Hányféle sorrendben ülhetnek le egymás mellé, ha A és C semmiképp sem szeretne egymás mellé szeretne ülni?
  - Az 5 diák mozi után cukrászdába megy, s egy kör alakú asztal köré ülnek. Hányféleképpen foglalhatnak helyet?
11. Matekból, irodalomból, történelemből és informatikából kell házi feladatot készítenem. Hányféle sorrendben tehetem ezt meg?
12. Hat lány és 5 fiú együtt megy el a színházba. A jegyek egymás mellé szólnak.
- Hányféleképpen ülhetnek le?
  - Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha fiú fiú mellé, lány lány mellé nem ülhet?
13. Négy házaspár lép be egy szobába, az ajtón egyszerre legfeljebb egy ember tud belépni.
- Hányféle sorrendben juthatnak be a szobába?
  - Hányféle sorrendben mehetnek be, ha két egymást követő belépő ember csak különböző nemű lehet?
  - Hányféle sorrendben mehetnek be, ha nő az első, és minden nőt a férje követ?
14. András, Balázs, Csaba, Dénes, Endre és Ferenc egy koncerten egymás mellett foglalnak helyet. András és Ferenc úgy döntenek, hogy egymás mellé ülnek.
- Hányféleképp ülhet le a társaság?
  - Hányféleképp ülhetnek le, ha András és Ferenc semmiképp sem akarnak egymás mellé ülni?
  - Koncert után beülnek egy étterembe, ahol kör alakú asztalnál vacsoráznak. Hányféleképp foglalhatnak helyet, ha bárki bárki mellé ülhet?
  - Hányféleképp foglalhatnak helyet, ha András és Ferenc még mindig nem szeretnének egymás mellett ülni?
15. 8 lányból és 10 fiúból hányféleképpen lehet összeállítani a lehető legtöbb egyszerre táncoló párt?

### *Ismétléses permutáció*

16. Egy 10 fős társaság 3 tiramisut, 4 dobostortát, 2 gesztenyepürét és 1 somlói galuskát rendel. Hányféleképpen oszthatja ki a felszolgáló az édességeket, ha nem tudja, ki mit rendelt?
17. Hányféle sorrendben írhatók le a MAGYARORSZÁG szó betűi?
18. Jocónak 3 egyforma fekete, 2 egyforma kék, 2 egyforma zöld és egy csíkos nyakkendője van. Hányféleképp viselheti ezeket 8 napon át, ha egy-egy napon egy nyakkendőt használ, és minden nap másikat?
19. Hányféle hatjegyű szám készíthető az 1, 2, 2, 3, 3, 3 számjegyekből?
20. Hányféle kilencjegyű, 5-tel osztható szám készíthető a 0, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6 számjegyekből?

### *Ismétlés nélküli variáció*

21. Tíz fő futóversenyen vesz részt. Hányféleképpen oszthatják ki az első három helyezettnek járó arany-, ezüst- és bronzérmét?

22. Hány olyan ötjegyű szám van, amiben minden számjegy különböző?
23. 10-féle sütemény van az asztalon. Négy darab különböző süteményt szeretnénk enni. Hányféleképpen lehetséges ez?
24. Egy iskolai rendezvényen 150 tombolajegyet adnak el. Ezek tulajdonosai között 10 különböző nyereményt sorsolnak ki. Hányféleképp történhet ez?
25. Egy 36 fős osztályban egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki azzal a feltétellel, hogy minden tanuló csak egy tárgyat kaphat. Hányféleképp végződhet a sorsolás?
26. Nyolcféle fagyaltból három különböző ízűt választunk egy tölcsérbe. Hányféleképp történhet ez?

### *Ismétléses variáció*

27. Az étteremben 5-féle főétel közül választhatunk, bármelyikből nagy mennyiség áll rendelkezésre. Egy 8 főből álló társaság hányféleképpen választhat belőlük egy-egy ételt, ha elvileg minden ételt mindenki szívesen elfogyaszt?
28. Hányféleképpen lehet kitölteni egy 13+1-es totószelvényt?
29. Hány ötjegyű szám van?
30. Hány ötjegyű szám készíthető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?
31. Tizenöt tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani öt különböző tárgyat, ha egy tanuló több tárgyat is kaphat?
32. Tízféle fagyaltból választunk 4 gombócot egy tölcsérbe, egy félelből többet is választhatunk. Hányféleképp alakulhat a tölcsér tartalma?
33. Hányféle három betű – három szám típusú rendszámot lehet létrehozni?

### *Ismétlés nélküli kombináció*

34. Tíz fő futóversenyen vesz részt. Hányféleképpen oszthatják ki az első három helyezettnek járó egyforma oklevelet?
35. Egy 30 fős osztályból hányféleképpen lehet kiválasztani két diákönkormányzati képviselőt?
36. Hányféleképpen lehet kitölteni egy ötös lottószelvényt?
37. Egy 32 lapos magyar kártyából 6 lapot húzunk. Hányféleképpen lehetséges ez?
38. Háromféle gyümölcsből szeretnénk 1-1 kg-ot vásárolni a piacon, ahol a gyümölcsök közül almát, körtét, sárgadinnyét, szilvát és őszibarackot árulnak. Hányféleképp végződhet a vásárlás?
39. Húsz ismerősünk közül tízet szeretnénk buliba hívni. Hányféleképp tehetjük ezt meg?
40. Egy 36 fős osztályból három diákot választunk, akik szerepelnek egy iskolai ünnepségen. Hányféleképp történhet a válogatás?
41. 12-féle fagyaltból 5 különböző ízű gombócot választunk egy fagyaltkehelybe. A gombócok elhelyezkedése a kehelyben közömbös számunkra. Hányféleképp történhet ez?

## Gráfok

42. Egy hattagú társaságban megkérdezzük embereket, hogy kinek hány ismerőse van a társaság tagjai között. Válaszul az 1, 1, 1, 2, 2, 5 számokat kaptunk (az ismeretségek mindig kölcsönösek). Szemléltesd a társaságon belüli ismeretségi viszonyokat gráffal!
43. Egy kistérség 5 faluja között létrehozható-e olyan úthálózat, amely 4 utat tartalmaz, továbbá bármely faluból bármely másik faluba el lehet jutni? Ha a válasz igen, akkor adj meg ábrák segítségével 3 különböző változatot! (A falvakat számozással különböztess meg!)
44. Egy 5 fős társaságban 8 kézfogás történt. Adj meg egy olyan gráfot, amely ezt szemlélteti! (A gráf csúcsai legyenek a társaság tagjai, élei pedig a kézfogásoknak feleljenek meg.)
45. Rajzolj egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2.

## IV. GYÖKVONÁS

### Négyzetgyök

46. Számítsd ki számológép nélkül a pontos értékét:

a)  $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

b)  $\sqrt{12} + \sqrt{3} - \sqrt{27}$ ;

c)  $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7}$ ;

d)  $\sqrt{200} - \sqrt{18} - \sqrt{50}$

47. Melyik a nagyobb?

a)  $6\sqrt{3}$  vagy  $5\sqrt{2}$ ;

b)  $3\sqrt{5}$  vagy  $4\sqrt{3}$ ;

c)  $2\sqrt{7}$  vagy  $3\sqrt{3}$ ;

d)  $4\sqrt{10}$  vagy  $3\sqrt{15}$

48. Számítsd ki számológép nélkül a pontos értékét:

a)  $\sqrt{\sqrt{61} - 5} \cdot \sqrt{\sqrt{61} + 5}$ ;

b)  $\sqrt{\sqrt{75} + \sqrt{59}} \cdot \sqrt{5\sqrt{3} - \sqrt{59}}$ ;

49. Gyöktelenítsd a törtek nevezőjét!

a)  $\frac{2}{\sqrt{2}}$ ;

b)  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ;

c)  $\frac{10}{\sqrt{5}}$ ;

d)  $\frac{a}{\sqrt{a}}$ ;

e)  $\frac{6}{7\sqrt{3}}$ ;

f)  $\frac{x}{2\sqrt{x}}$ ;

g)  $\frac{7}{\sqrt{13} - \sqrt{6}}$ ;

h)  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

### n-edik gyök

50. Végezd el a következő gyökvonásokat! Indokold eredményeid a gyökvonás definíciója alapján!

a)  $\sqrt[3]{8}$ ;

b)  $\sqrt[4]{16}$ ;

c)  $\sqrt[3]{27}$ ;

d)  $\sqrt[5]{32}$ ;

e)  $\sqrt[3]{125}$ ;

f)  $\sqrt[4]{10000}$ ;

g)  $\sqrt[6]{1000000}$

## V. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

51. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a)  $2x^2 - 4x - 6 = 0$ ;

b)  $x^2 + 7x + 10 = 0$ ;

c)  $-60 + 2x^2 - 2x = 0$

d)  $4x^2 - 224 + 4x = 0$

e)  $6x = x^2 + 5$ ;

f)  $2x^2 = x + 3$ ;

g)  $0 = x^2 - 8x$ ;

h)  $x^2 - 9 = 0$ ;

i)  $2x^2 + 3x - 2 = 0$ ;

j)  $80 - x^2 = x^2 + 6x$

k)  $80 + x(3x + 8) = 2x(x - 5)$

l)  $27x - 3x^2 - 42 = 0$

m)  $x^2 = 4 + 3x$

n)  $18x - 3x^2 - 24 = 0$

o)  $16 + 2x^2 + 18x = 0$

p)  $6x - 3x^2 + 189 = 0$

q)  $200 - 20x - 4x^2 = 0$

52. Az egyenlet megoldása nélkül állapítsd meg, hogy hány valós gyöke van a következő egyenletnek:

$$8x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$8x^2 + 4x - 4 = 0$$

53. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a)  $(1 + 2x)(3 - x) + x^2 = 9$

b)  $9x^2 - 9x + 2 = (3x - 1)(3x - 2)$

c)  $47 - x(3x + 4) = 2(17 - 2x) - 62$

d)  $10(x - 2) + 19 = (5x - 1)(1 + 5x)$

e)  $(x - 7)(x + 3) + (x - 1)(x + 5) = 102$

f)  $(3x - 4)^2 - (6x - 7)^2 = 0$

g)  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = 2$

h)  $\frac{x^2 + 6x - 7}{3x^2 - x - 2} = 5$

i)  $\frac{-3x^2 + x}{3x^2 - 4x + 1} = 3$

j)  $\frac{x + 4}{3} = \frac{2x + 1}{x}$

k)  $\frac{12}{x} - \frac{7x - 6}{6} + 5x - 26 = 0$

l)  $\frac{3x - 7}{x + 5} = \frac{x - 3}{x + 2}$

54. Írj fel olyan másodfokú egyenletet (a lehető legegyszerűbb alakban), amelynek gyökei:

a) 5 és 2;

b) 3 és -8;

c) -3 és  $\frac{1}{2}$ ;

Amelyikben nem egész számok az együtthatók, azt alakítsd egész együtthatóssá!

55. Egyszerűsítsd a következő törteket!

a)  $\frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 3x - 6}$ ;

b)  $\frac{6x^2 + x - 2}{-2x^2 + 5x - 2}$ ;

56. Oldd meg az alábbi magasabb fokú, másodfokúra visszavezethető egyenletet!

a)  $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ ;

c)  $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

b)  $16x^4 - 17x^2 + 1 = 0$

d)  $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

57. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenséget!

a)  $x^2 - 6x + 5 < 0$ ;

d)  $-x^2 + x + 20 > 0$ ;

b)  $2x^2 - 2x - 12 \geq 0$ ;

e)  $x^2 - 6x + 10 > 0$ ;

c)  $-2x^2 + 5x + 7 \leq 0$ ;

58. Oldd meg az alábbi egyenletet!

a)  $\sqrt{5 - x} = x - 3$ ;

c)  $\sqrt{2x + 2} = 3x - 1$ ;

b)  $x - 2 = \sqrt{3x - 6}$ ;

d)  $2\sqrt{6 - 2x} = 9 + x$ ;

59. Oldd meg a következő egyenletrendszereket!

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x \cdot y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

60. Egy téglalap alakú asztallap területe  $32 \text{ dm}^2$ , kerülete  $24 \text{ dm}$ . Mekkora az oldalai?

61. Egy konvex sokszögben összesen  $90$  átló húzható. Határozd meg a sokszög oldalainak számát!

62. Három egymást követő természetes szám négyzetének összege  $974$ . Melyek ezek a számok?

63. Melyik az a szám, amelyet, ha megszorunk a nála  $1$ -gyel nagyobb számmal, a szorzat  $25$ -tel lesz nagyobb, mint az eredeti szám?

64. Egy konvex sokszög átlóinak száma  $77$ . Hány oldalú a sokszög?

65. Határozd meg annak a téglalap alakú kertnek a területét, amelynek átlója  $20 \text{ m}$ , a kerülete pedig  $56 \text{ m}$ !

66. Melyik az a két szám, amelynek összege  $32$ , négyzetük különbsége  $256$  ?

67. Két egymás után következő természetes szám szorzata  $552$ . Melyik ez a két szám?

68. Bontsd fel a  $240$ -t két olyan tényezőre, amelyek összege  $31$ .

69. Egy derékszögű háromszög egyik befogója háromszor akkora, mint a másik, a területe pedig  $7,5 \text{ cm}^2$ . Mekkora a háromszög befogói?

70. Hány oldalú sokszögnek van annyi átlója, mint ahány oldala?

## VI. GEOMETRIA (HASONLÓSÁG)

### Magasságtétel, befogótétel

71. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó  $\sqrt{12}$  cm-es magassága az átfogót két olyan szakaszra bontja, melyek hossza  $1$  cm-rel tér el egymástól. Mekkora a befogók?

72. Egy derékszögű háromszög egyik befogója  $5 \text{ cm}$ , az átfogóra eső merőleges vetülete  $2 \text{ cm}$ . Mekkora a többi oldal és az átfogóhoz tartozó magasság?

### Hasonló síkidomok területe, hasonló testek térfogata

73. Egy háromszög oldalainak hossza  $5 \text{ cm}$ ,  $7 \text{ cm}$  és  $8 \text{ cm}$ . Egy hozzá hasonló háromszög leghosszabb oldala  $6 \text{ cm}$  hosszú. Mekkora a háromszög hiányzó oldalai?

74. Egy két méter magas bot árnyéka  $2,8 \text{ m}$  hosszú. Milyen magas az a kémény, aminek az árnyéka  $38 \text{ m}$  hosszú?

75. Hányszorosára növeltük egy háromszög oldalait, ha a területe a kilencszeresére nőtt?

76. Hányszorosára változik a kocka térfogata, ha az élét a kétszeresére változtatjuk?

77. Egy háromszög egyik oldala  $7 \text{ cm}$ , a hozzá tartozó magasság  $6 \text{ cm}$ . Ennek a magasságnak a felezőpontján át húzzunk a  $7 \text{ cm}$ -es oldallal egy párhuzamost! Számítsd ki a keletkezett síkidomok területét!

## IV. HEGYESSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI (TRIGONOMETRIA)

### Szögfüggvények használata derékszögű háromszögekben

78. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 10 cm, a vele szemközti szög  $70^\circ$ . Mekkora az oldalai?
79. Egy derékszögű háromszög átfogója 15 cm. A háromszög egyik hegyesszöge  $42^\circ 10'$ -os. Mekkora a többi oldal?
80. Egy 2 m hosszú létrát a falnak döntöttünk. A létra alja 1,3 m-re van a faltól. Mekkora szöget zár be a talajjal a létra?
81. Egy torony árnyéka a vízszintes talajon 75m hosszú. Milyen magas a torony, ha a napsugarak a vízszintes talajtól számítva 60 fokos szögben esnek a talajra?
82. Egy lejtő a vízszintessel  $24^\circ$ -os szöget zár be, és 2,8 m magasra visz. Mekkora a lejtő hossza és a vízszintesre eső vetülete?
83. Mekkora az egyenlő szárú háromszög alapja, ha szára 5,6 cm, az alapon fekvő szögei  $58^\circ 13'$ -esek?
84. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 12,5 cm, a szárszöge  $52^\circ$ -os. Mekkora a területe?
85. Egy téglalap átlói  $33^\circ$ -os szöget zárnak be egymással. Rövidebbik oldala 5 cm. Mekkora a hosszabbik oldala és az átlói?

Adott egy szögfüggvény, számold ki a többit!

86.  $\sin \alpha = 0,6$ .  $\alpha$  kiszámolása nélkül számold ki  $\alpha$  többi szögfüggvényét!
87.  $\cos \alpha = 0,15$ .  $\alpha$  kiszámolása nélkül számold ki  $\alpha$  többi szögfüggvényét!

### Nevezetes szögek szögfüggvényértékei

88. Számold ki a következő kifejezés pontos értékét! (Számológép nem használható!)  
 $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \sin 60^\circ$